Prolegomena

om Addition,

med Vidtberömda Filosofiska Fakultetens minne,

under skydd

af

Mag. CARL JOH. Ds. HILL,

Prof. i Math.

till Lagerkransens vinnande

försvaradt i stora Auditorium

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

den 11 Juni 1844

af

CORFITZ AUG. BECKFRIIS,

Philosofie Kandidat af Skånska Nationen.

II.

Lund,

tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,

1844.

det hela och des delar, att hans föreställning måste hafva motsvarat den nu gifna definition.

O. Jag har någon aning om, att en *allmän definition* på *summa* också bör kunna lemnas *genom någon viss grundformel,* från hvilken det vore möjligt att härleda alla andra additionsformler och således alla denna operations grundreglor. Att sådant måtte vara görligt, förmodar jag deraf, att multiplication kan definieras genom denna enda formel $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$, ur hvilken alla andra denna operations formler kunna härledas.

J. Det sednare medgifves till det mesta, eller blott med den modification, att den nyssnämnda formeln, genom vederbörlig analys, befinnes så bestämma den operation, hvarigenom a och α eller a och β äro förenade, att des resultat mot dem blir proportionelt, eller $a\alpha : a\beta = \alpha : \beta$. Men hvad addition angår, så har jag genom vederbörlig analys öfvertygat mig, det ingen sådan abstract formel finnes, hvarigenom addition kan så bestämmas, att den blir det, som man dermed vanligen förstår och ingenting annat. Så t. ex. är den förut från Euclidis axiom hemtade definition alltför vidsträckt och skulle gälla om hvarje *rationel operation.*

Det finnes dock en annan egenskap af addition, hvilken kan läggas till grund för alla de öfrige, och hvars undersökning är högst vigtig, då den är karakteristisk för all addition, från hvilken sednare alle öfrige, så Arithmetikens som analysens grund-operationer organiskt utvecklas. Annorstädes *) är det nemligen visadt, att multiplikation icke är annat än en gentagen eller repeterad (itererad) addition, och af multiplikation utvecklas potensering på samma sätt o. s. v. — Det vill säga, att addition och multiplikation hafva en gemensam beröringspunkt, eller att det finnes et fall af begge, der de äro i grund samma operation, fast verkställd på et något olika sätt. Addition af flere lika storheter är nemligen multiplikation (af en af dem) med helt tal, liksom tvertom denna multiplikation är i sjelfva verket en addition, ehuru både H:r *L.* och *C.* trodde sig äfven härutinnan böra skilja dem åt. Detta är dock så mycket mera origtigt, som det just genom denna beröringspunkten blir möjligt, att öfverföra vissa egenskaper af addition på multiplikation, t. ex. från den, att ordningen mellan posterne (par-

---

*) Eucl. V. Bok, eller allm. Proportionsl. Lund 1832. (Ty $a + a = 2a$, $2a + a = 3a$, o. s. v.)

tes add.), är likgiltig, visa, det förhållandet är detsamma med factorerne. Med detsamma kan man genom et slags definierande interpolering höja sig till et allmännare begrepp om multiplikation. Dylikt blir ock förfarandet vid den organiska utbildningen af de högre operationerne.

O. m. fl. Vi inse mycket väl att det, vid så beskaffade omständigheter, är högst vigtigt att noga utreda *addition,* då alla öfriga operationer ytterst fota sig derpå och till och med kunna genom behörig upplösning dit återföras. Men för undervisningen frukta vi, att ingenting derigenom vinnes, då Mathematikens fält är så ofantligen vidsträckt, och ynglingarne vilja snart begifva sig på djupet, hvarutinnan vi hvarken kunna eller vilja hindra dem, då de gerna utan bevis antaga våra satser och reglor om addition och subtraction.

J. M. Hrr! Just af sednare skälet anser jag en dialektisk analys af begreppen summa och skilnad och således af de operationer, hvarigenom dessa erhållas, vara högt vigtig. Ty huru enkla än de första begreppen äro, så äro de dock högst djupa, och innehålla i sig, liksom in nuce, hela vetenskapen, eller de äro de frö, hvarifrån denne organiskt skall utbilda sig. Äfven jag har â min sida insett vigten af, att så mycket som möjligt sammantränga vetenskapens innehåll inom så litet omfång som möjligt, utan att hvarken tydlighet eller bevisningens stränghet deraf lida. Ty man måste medgifva, det den nu vuxit till et ofantligt omfång, särdeles om man vill sammanfatta alla des detaljer, och det till och med om man än utesluter des tillämpning (Mathesis applicata). Man kunde väl, som en Linné eller en Lavoisier bringa vetenskapens stora förråd i ett mera ordnadt helt; men i Mathematiken kan detta anses redan vara gjordt, då man der i allmänhet går mycket systematisk till väga *). Sådant vore derföre ej nog: man måste äfven söka förenkling på annan väg: — som bleføve en verkligen "*Regia via*", hvars tillvaro annars med skäl bestrides. Jag har sökt den. Också tror jag ej, att frukten af mina forskningar varit fåfängt eftersökt, då det visat sig, att redan i begreppen summa och produkt, samt i de-

---

*) Jag vill dock härmed ingalunda bestrida värdet och nyttan af et "système des connaissances Mathemathiques", men till des utförande fordras mycken omtanka, omdöme och ordningssinne, samt en klar öfversigt af det helas inre sammanhang.

ras reglor allt hvad vi hittills känna af functionslära och således af ren vetenskaplighet uti Mathematiken, är deruti nästan omedelbart inbegripet.

Alle. Det vore mycket: Låt oss höra!

J. Herrarne torde finna, att om en viss grundformel för addition kan uppställas, ur hvilken alla des reglor kunna härledas, och tillika det om denna grundformel kan visas, att den gäller icke allenast för den vanliga addition, utan äfven för någon annan operation, så vore icke allenast dennas reglor med detsamma gifna, utan äfven kunde genom gentagning härledas en högre med multiplikation till sine reglor likartad operation o. s. v. Redan härigenom skulle således Mathematikens omfång fördubblas, eller i fall de sednare operationerne redan vore kända, i sjelfva verket förminskas till hälften.

Flere. Detta medgifves visserligen, men likasom multiplikation och potensering synes oss också addition vara genom sina grundreglor bestämd, hvarföre vi icke ännu inse, huru dermed något synnerligt conseqvens mathematiskt system skulle kunna vinnas.

J. Jo mycket, ganska mycket; ty det förra är ej fallet, utan det finnes ej blott tvenne operationer, som följa additionens grundreglor, utan en oändlig mängd, och således är å ena sidan icke allenast et oändligt mångfaldigande af Mathematikens innehåll möjligt, utan äfven, så vidt som detta förefinnes, et oändligt sammanträngande (en concentration) deraf görlig. Man bör derföre å ena sidan hafva liksom hela Mathematiken till sin lifsprincip och till sitt hela väsendtliga innehåll samlad och concentrerad inom ett enda frö, ur hvilket man å en annan för sig åter kan efter insedda principer låta den organiskt uppvexa i sin sköna form ända till full blomma och slutlig frukt. Så synes mig hvarje lärande för lärjungen böra utveckla vetenskapen, och lärjungen låta den åter för sig framstå i sin sköna ungdomliga gestalt.

Alla: Det vore herrligt, men vi tvifla ännu.

J. Tålamod. Först: hvilken är additions grund-egenskap? hvilken des grundformel?

Flere: De måste hemtas från den nyligen vunna definitionen.

J. De kunna visserligen derur härledas, men går man ut från denna definition, så vinner man naturligtvis ingenting mera och kommer ej högre än till den vanliga addition. Vi måste derföre återgå till en viss af de vacklande de-

finitionerne, som en och annan af herrarne förut omrört, men för hvars mera omfattande innehåll ingen af er torde gjort sig nog reda.

Flera: Kanske vi skola anse det, att addition är en enformig operation, såsom dess grundegenskap?

J. Det är visserligen en af de egenskaper vi måste antaga, men den är ej tillräcklig.

L. Det kan ej nekas, att en hufvudegenskap, så af addition som af multiplikation, är den, att *ordningen mellan storheterne* (partes addendæ eller factorerne) *är likgiltig.*

J. Den är det; och vi behöfva blott utgå från det enklare fallet, då 3:ne storheter a, b, c skola adderas. Var god sätt detta i formel.

O. Först adderas a och b, och deras summa kunna vi teckna $(a + b)$, helst "addition ej är annat än detta teckens nedskrifvande." Vidare addere vi c till denna summa $(a + b)$, då vi få $(a + b) + c$, som ock kan kallas summan af *de tre storheterne* a, b och c, och, som sådan, teknas $a + b + c$. Men jag kan också addera i en omvänd ordning, eller först c och b gör $(c + b)$, så a, då $a + b + c$ blefve $(c + b) + a$.

J. En formel för addition vore således $(a + b) + c = (c + b) + a$. Men är den en caracteristisk grundformel?

O. Jag har ej försökt att derur utleta de öfrige additions- och subtractions-formlerne och att deraf bilda reglor, men jag anser sådant ganska görligt.

J. Så är det, och derom kunna vi för tillfället komma öfverens. (Se någon allmän Storhetslära). Men huru skole vi multiplicera tre talstorheter a, b och c?

O. Jo först kunna vi taga produkten af a och b, eller, som allt är ett, skrifva tecknet $(a \,.\, b)$, (hvilket clauderas, så vida som det betecknar en enda talstorhet), så produkten deraf och af c, gör $(a \,.\, b) \,.\, c$. Eller kunna vi ock multiplicera i en omvänd ordning, nemligen först c med b gör $(c \,.\, b)$ så $(c \,.\, b)$ med a gör $(c \,.\, b) \,.\, a$, och detta måste äfven vara produkten af a, b och c.

J. Vi hafva således denna formel $(a \,.\, b) \,.\, c = (c \,.\, b) \,.\, a$, hvilken äfven torde kunna visas vara en grundformel för multiplikation?

O. Derpå torde kunna tviflas, då jag ej inser, huru denna operations rätta grundformel $n \,.\, (a + b) = (n \,.\, a) + (n \,.\, b)$ derur kan härledas.

J. Låt så vara. Men i alla fall kunna vi dock komma öfverens, att åtskilliga af multiplikations-formlerne derur kunna härledas, isynnerhet om man dertill lägger att $1 . a = a$.

O. Det medgifves.

J. Men om vi nu skrifva formlen $(ab)\,c = (cb)\,a$, der operationstecknet är uteslutet, och det ej är gifvet att detta just skall vara $+$ eller $\times$; gäller då denna formel antingen för addition eller för multiplikation eller för någon annan operation?

O. Det förra är tydligt, då vi, till följe af det föregående, här kunna lika väl sätta $+$ som $\times$ mellan hvarje två bokstäfver (eller storhetstecken).

J. Men äfven andre operationer kunna dermed förstås, t. ex. denna af addition och multiplikation sammansatta $a + b + \overbrace{n.a.b}$, der n är hvad talstorhet som helst; ty äfven detta uttryck kan i föregående formel införas i st. f. (ab), och et motsvarande $a + c + \overbrace{n\,.\,a\,.\,c}$ för ac o. s. v., hvarigenom den blir först
$(ab) + c + n\,.\,(ab)\,.\,c = (cb) + a + n\,.\,(cb)\,.\,a$,
så $a + b + \overbrace{n.a.b} + c + n\,.\,(a + b + \overbrace{n.a.b})\,.\,c =$
$= c + b + \overbrace{n.c.b} + a + n\,.\,(c + b + \overbrace{n.c.b})\,.\,a$, och kan numera genom en lätt utveckling vidare pröfvas. Den nyssnämde formlen kan ock på många andra sätt godtgöras. För att derföre i en och samma formel sammanfatta ganska mycket, så tänker jag mig en operation, eller hvilken som helst af de operationer, som följa en sådan grundregel, som denna formel $(ab)\,c = (cb)\,a$ uttrycker, och kallar hvarje sådan operation, enär den har likadana reglor som addition, för *additiv,* eller (af skäl, som snart skola angifvas) *hypersymmetrisk,* och hvardera des del för en *allmän* eller *formel summa* af *a, b,* och *c,* samt *ab* en dylik eller et *agregat* af *a* och *b,* (efter denna operation ej annorlunda än genom denna formel är bestämd) *). Dervid måste dock tilläggas, att för något visst värde *I* af *c* är *cb* detsamma som *b, b* vare hvad som helst. Detta värde kallar jag operationens *indifferent,* (för vanlig addition är denna $=0$, och för multi-

*) Denna operation kan också få et eget, eller rättare alla dessa operationer et gemensamt tecken, som må vara | och heta *magis,* så att $a|b$ blir detsamma som nyss *ab*, eller en operation bestämd genom formeln $(a|b)\,|c = (c|b)|a$. Således står här | för $+$ eller för . eller för det tecken hvarmed $a + b + \overbrace{nab}$ eller hvarje lika beskaffad formel skulle uttryckas såsom blott beroende af *a* och *b.*

plikation $=1$). Om vi derföre i föregående allmänna formel sätte $b=$ Indifferenten $=I$, så blir $a|b=a|I=a$, och $c|b=c|I=c$, och således $a|c=c|a$, eller den ifrågavarande operation är *symmetrisk* *).

O. Deraf följer ock, att den nu antagna allmänna grundformeln också kan skrifvas så: $(a|b)|c=a|(b|c)$, ty, då hvarje två i samma binom närstående storheter här få byta rum, så är $cb=c|b=b|c$, och $(cb)\,a=(c|b)|a=a|(b|c)$. Om man derföre skrifver $a|b|c$, och kallar detta för en *allmän summa* af de tre storheterna a, b och c, och anser den böra definieras såsom en (genom föregående formel bestämd) allmän summa af trenne storheter, så kan, då här blott 2 sätt att claudera äro möjliga, $a|b|c$ ej komma att betyda annat än antingen $(a|b)|c$ eller $a|(b|c)$, hvilket, enligt det nu gjorda antagandet, här är allt ett. På samma sätt lärer en allmän summa af flera storheter alltid kunna definieras som en summa af blott tvenne, men hvaraf åtminstone den ena summanden sjelf åter är en summa, o. s. v. tills man återkommit till en summa af blott 2:ne enkla storheter.

J. Alldeles rigtigt. T. ex. $a|b|c|d$ betyder detsamma som $(a|b|c)|d$ eller som allmänna summan af de begge storheterna $a|b|c$ och d; och likaledes $a|b|c|d|e$ den af $a|b|c|d$ och e eller $=(a|b|c|d)|e$, o. s. v. Eller kan man ock definiera så: $a|b|c|d=a|b|(c|d)$, $a|b|c|d|e=a|b|c|(d|e)$ o. s. v. Utgående från dessa definitioner samt användande de förutnämnde satserna, att operation, som tecknet $|$ nu antyder, är både *enformig* och *symmetrisk* samt tillika *clausibel* (d. ä. sådan att $(a|b)|c=a|(b|c)$), kan man lätt bevisa följande 2:ne allmänna satser:

1) I hvarje allmän summa $a|b|c|d|e\ldots|u$ är ordningen mellan storheterne (summanderna, posterne) likgiltig (t. ex. den är ock $=c|e|b|a|u|\ldots|d$).

2) Der får ock clauderas huru som helst, så att den kan anses för en

---

*) Jemte föregående allmänna formel, skulle man ock kunna i en omvänd ordning tillika antaga denna $a|c=c|a$, och då läte det tvärtom visa sig, att den sålunda genom dessa begge formler bestämda operation måste ega en indifferent, eller en viss sådan storhet I att alltid $a|I=a$. Såsom gemensamt vilkor måste dock vid bägge sätten det tillkomma, att operation är *enformig*, eller $a|b=\alpha|\beta$, så ofta $a=\alpha$ och $b=\beta$, (så att operationen med lika storheter alltid ger lika facit).

summa af blott 2 eller 3 storheter, eller flere, såsom

$$a|b|c|d|e\,..\,|u=(a|b|c)|(d|e\,..\,u)=(a|b)|(c|d)|(e|\,...\,|u).$$

O. Dessa satser vet man redan gälla både om den vanliga addition, och multiplikation, (så vida a, b, c .. u betyda talstorheter).

J. Men de måste ock gälla om hvarje allmän summa af flere storheter, som är bildad efter samma grundreglor, det vill säga, som upplöses på samma sätt steg för steg i en allmän summa $(\alpha|\beta)$ af tvenne storheter, hvilken sednare är karakteriserad af grundformeln $(a|b)|c=(c|b)|a$ och eger en indifferent I (sådan, att alltid $I|a=a$). Den förra rättfärdigar namnet ”*hypersymmetrisk*”, som vi tilldelat alla dessa operationer. Sådane äro icke allenast vanlig addition och multiplikation, utan äfven den operation med a och b som ger detta resultat: $a+b+nab$, som derföre kan föreställas med $a|b$, äfvensom den som ger detta alllmännare: $\frac{a+b+nab}{1+rab}$, hvilket är en viss bråkfunction af första graden både till a och b, m. fl. Men likasom den vanliga summan och produkten ega hvart sitt tecken ($+$ och $\cdot$ eller $\times$), så kan man ock tilldela dessa hvart sitt egna tecken, hvilka må vara ⸸ och ♀ $\left(\text{eller } a\left|\frac{n}{r}\right|b\right)$, så att de bägge sistnämnde uttryck kortligen kunna mera bestämdt föreställas med a ⸸ b och a ♀ b eller $a\left|\frac{n}{r}\right|b$, när n och r behöfva antydas. Så kan ock a ⸸ b teknas med $a\left|\frac{n}{o}\right|b$.

O. Stafven | föreställer således hvilket som helst af tecknen $+$, $\times$, ⸸, ♀.

J. Den kan och föreställa otalige andre ...

O. Förenämnde 1) satsen skulle således vilja säga, att t. ex. om man har equationerne:

$a+b+nab=\beta$, eller a ⸸ $b=\beta$

$\beta+c+n\beta c=\gamma$, „ β ⸸ $c=\gamma=(a$ ⸸ $b)$ ⸸ c.

$\gamma+d+n\gamma d=\delta$, „ γ ⸸ $d=\delta=((a$ ⸸ $b)$ ⸸ $c)$ ⸸ d.

$\delta+e+n\delta e=\varepsilon$, „ δ ⸸ $e=\varepsilon=(a$ ⸸ b ⸸ c ⸸ $d)$ ⸸ e.

så måste de gifva samma värde på ε, som följande: $d+a+nad=\alpha'$, $\alpha'+e+n\alpha'e=\beta'$, $\beta'+c+n\beta'c=\gamma'$, och $\gamma'+b+n\gamma'b=\varepsilon$ (eller d ⸸ $a=\alpha'$, α' ⸸ $e=\beta$, β' ⸸ $c=\gamma'$ och γ' ⸸ $b=\varepsilon$), och göres desutom $d+e\,dn=\zeta$, så blir ock $\gamma+\zeta+\gamma n\zeta=\varepsilon$.

J. De innehålla ock mycket annat och finna ofta en mångfaldig tillämpning, särdeles kan man derur härleda åtskilliga summations-satser; men för det

närvarande torde det vara nog, att först fästa naturfilosofernas uppmärksamhet på den omständigheten, som vid deras constructioner äfven torde finnas väsendtlig, nemligen att i den allmänna summan af trenne storheter $a|b|c$ är det likgiltigt antingen mellanstorheten (b) förenas med den första (a) eller sista (c), eller att triplicité derigenom återföres till dualité och tvertom, äfvensom att dualitéten ej finner sin förklaring annorstädes än just uti denna triplicité m. m.

Vidare vilje vi tillse, huru af vår nu erhållna allmänna addition kunna härledas andra operationer, och först en allmän subtraction.

O. Denna kan ej vara något annat än den operation, hvarigenom af en summa och des ena del finnes den andra, såsom när x sökes ur $x|a = c$, och des facit x eller den *allmänna skilnaden* mellan c och a, som kan tecknas $c|\overline{a}$, eller $c\lceil a$, måste vara den storheten, som ökt med subtrahenden (den gifna delen a) återger minuenden (c) d. ä. den gifna summan. Således bör $(c\lceil a)|a = c$.

J. Alldeles. Vi få således detta axiom: om $x|a = c$, så är $x = c\lceil a$, och tvertom, ifall $x = c\lceil a$, så måste $x|a = c$; eller kan ock det förra anses som en definition på skilnaden $c\lceil a$. Om dessa allmänna summor och skilnader bevisas lätt, och på nästan lika sätt, alla de satser som gälla om de vanliga, såsom, utom föregående, dessa:

1) $a|(b|c) = (a|b)|c = a|b|c$,

2) $a\lceil(b|c) = (a\lceil b)\lceil c$,

3) $a|(b\lceil c) = (a|b)\lceil c$

4) $a\lceil(b\lceil c) = (a|c)\lceil b$

5) $(a\lceil b)|(c\lceil d) = (a|c)\lceil(b|d)$,

6) $(a\lceil b)\lceil(c\lceil d) = (a|d)\lceil(b|c)$ etc.

och dessa formler återge de vanliga om för $|$ sättes $+$ och $-$ för $\lceil$. Men i allmänhet kunna vi märka att om vi för kortheten skull skrifva $\bar{x}$ för $I\lceil x$ och kalla detta för *allmänt negativt x*, så kan alltid hvarje skilnad förvandlas i en summa, såsom $a\lceil b = a|\bar{b}$, hvarföre i en så förvandlad skilnad ordningen äfven blir likgiltig och klammer lofliga, o. t. ex.

$(a\lceil b)|(c\lceil d)\lceil e = a|\bar{b}|c|\bar{d}|\bar{e} = a|c|\bar{b}|\bar{e}|\bar{d} = (a|c)\lceil(b|e|d)$ etc. Allt noga öfvervägadt, finnes det derföre ingen enda allmän formel angående vanlig addition och subtraction, som ej kan generaliseras, och utsträckas till alla de operationer som kunna inbegripas under vår allmänna addition och subtraction och som således